2017年1月第1版

第10次印刷

# 第1部分 基本思想和基本方程

## 第1章 计算流体力学的基本原理

## 第2章 流体力学的控制方程组

### 2.2 流动模型

2.2.1 有限控制体

控制体，控制面。控制体的空间位置可以是固定的，对应守恒型控制方程。控制体也可以随流体运动，使得位于这个控制体内的流体质点始终是同一批，对应非守恒型控制方程。

2.2.2 无穷小流体微团

设想流动中的一个无穷小流体微团，其体积微元是。流体微团的位置可以是固定的，对应守恒型方程。流体微团可以沿流线运动，其速度等于流线上每一点的当地流速，对应非守恒型方程。

### 2.3 物质导数

我们采用随流体运动的流体微团。

流体微团从时刻的点运动到时刻的点

令，得到

代表流体微团通过点时密度的瞬时时间变化率。定义为密度的物质导数。

是物质导数，是跟踪一个运动流体微团的时间变化率；是当地导数，是固定点处的时间变化率；是迁移导数，表示流体微团从一点运动到另一点，流场的空间不均匀性引起的时间变化率。

物质导数是对时间的全导数。

### 2.4 速度散度及其物理意义

控制体在运动中，总是由相同的流体粒子组成。随着流场特性的变化，这个质量固定的、运动着的控制体，体积会不断变化。考虑控制体表面上以当地速度运动的一个无穷小面元，

内运动导致的控制体体积改变

整个控制体总的体积变化

令，得到

而

假设控制体收缩到一个非常小的体积，变为无穷小运动流体微团

### 2.5 连续性方程

这一节论述质量守恒。

2.5.1 空间位置固定的有限控制体模型

2.5.2 随流体运动的有限控制体模型

运动控制体具有固定不变的质量。因为物质导数表示流体微团随流体运动时属性对时间的变化率，有限控制体是无数个流体微团组成的，所以不变总质量的物质导数等于零。

2.5.3 空间位置固定的无穷小微团模型

2.5.4 随流体运动的无穷小微团模型

随流体运动的无穷小流体微团有固定质量

2.5.5 方程不同形式之间的转化

### 2.6 动量方程

使用随流体运动的无穷小微团模型

力分为体积力和表面力，其中表面力分为包在流体微团周围的流体施加的作用于微团表面的压力分布，和外部流体推拉微团产生的，以摩擦方式作用于表面的切应力和正应力分布。

将作用在单位质量流体微团上的体积力记做，作用在流体微团上的体积力的分量为

平面内，切应力与流体微团剪切变形的时间变化率有关，正应力与流体微团体积的时间变化率有关。在大多数粘性流动中，正应力要比切应力小得多。当法向速度梯度很大时，正应力就变得重要了。

表示方向的应力作用在垂直于轴的平面上。速度的三个分量的正的增量与坐标轴的正向一致。

方向总的表面力为：

方向总的力为：

对运动的流体微团

所以

同理

统称为纳维—斯托克斯方程。

于是得到纳维—斯托克斯方程的守恒形式：

切应力与应变的时间变化率，也就是速度梯度成正比的流体称为牛顿流体，不成正比的则称为非牛顿流体。空气动力学中流体都可以看成牛顿流体，对牛顿流体有

其中是分子粘性系数，是第二粘性系数

### 2.7 能量方程

采用随流体运动的无穷小微团模型。

体积力做功功率为

压力在方向做功的功率为

在垂直于轴的表面上，切应力在方向做功的功率为

方向表面力对运动流体微团做功的功率为

体积力和表面力对运动流体微团做功的功率为

定义为单位质量的吸收或释放辐射热造成的体积加热率，为热传导在单位时间内通过单位面积在方向传输的热量，那么

流入微团的净热量

流体微团单位质量的内能为，动能为，总能量的时间变化率为

得到能量方程

注意

于是

其中替换为也成立，可以得到能量方程的守恒形式。

利用牛顿流体的性质

### 2.8 流体力学控制方程的总结与注释

2.8.1 粘性流动的纳维—斯托克斯方程

只有当流动中不同组分之间存在浓度梯度时才会发生质量扩散。本书不包括质量扩散。

2.8.2 无粘欧拉方程

无粘流的定义是忽略了耗散、粘性输运、质量扩散以及热传导的流动。

### 2.9 物理边界条件

先考虑适合粘性流动的物理边界条件。物面边界条件规定紧挨物面的气流与物面之间相对速度为零，称为无滑移条件。

温度的无滑移边界条件是直接与物面接触的气流温度等于物面材料温度。

绝热壁的边界条件为

对于无粘流动，非渗透壁的边界条件是

### 2.10 适合CFD使用的控制方程

守恒形式的控制方程为算法设计和编程计算提供了方便。

控制体的空间位置不变，关心的是流入流出控制体的质量流量、动量流量和能量流量。

令

守恒形式的控制方程可以写成通用的形式

列向量称为解向量，称为通量项，代表源项。

时间推进方法

设想一种定常流动

假设可以沿方向推进求解

## 第3章 偏微分方程的数学性质对CFD的影响

### 3.2 拟线性偏微分方程的分类

考虑拟线性方程组

其中是的未知函数，是的函数。可以把看成平面上连续的速度场。

考虑在平面上任意一点，寻求过这一点的某条曲线，沿着这条曲线的导数是不确定的，跨过这条曲线时，导数是不连续的。这种特殊曲线称为特征线。

考虑方程组

系数矩阵

如果选择了过点的一个方向，恰好使得，那么这个方向就是特征线的方向。

展开有

令

那么

判别式

，双曲型方程组。

，抛物型方程组。

，椭圆型方程组。

要使成为不确定的，那么应该有

这个关系限定为沿着特征线。

这个仅沿着特征线成立的方程称为相容性方程。

### 3.3 确定偏微分方程类型的一般方法——特征值法

考虑

定义

那么

令

那么有

用的特征值确定方程组的类型。实际上

的特征值就是特征线的斜率。

### 3.4 不同类型偏微分方程的一般性质

不同类型的方程具有不同的数学特性，也反映出流场具有不同的物理特性。

### 3.5 定解问题的适定性

如果一个偏微分方程的解存在并且是唯一的，同时解连续地依赖于初始条件和边界条件，那么这个问题是适定的。在CFD中，数值求解之前确认问题是适定的非常重要。

# 第2部分 基本的数值方法

偏微分方程的离散化称为有限差分方法，积分形式方程的离散化称为有限体积方法。

## 第4章 离散化的基本方法

为方便起见，假设网格在方向上是均匀的，间距是。在CFD中，往往要在经过变换得到的计算空间中进行数值计算。在计算空间中，变换后的自变量是等距分布的。但是原自变量在物理空间不一定是等距分布的。

网格沿方向用标记，沿方向用标记。

CFD可以用三种离散化方法：有限差分、有限体积或有限元中的任何一种进行处理。

### 4.2 有限差分基础

是偏导数的有限差分格式，其余项构成截断误差。

称为一阶向前差分。

称为一阶向后差分。

称为二阶中心差分。

根据

可得

而

于是

给出了混合导数的二阶精度中心差分。

对本书来说，二阶精度已经足够。

构造有限差分的另一种方法是构造多项式近似。

### 4.3 差分方程

考虑非定常一维热传导方程

方向的标号分别为，分别写成下标和上标。偏微分方程中用于推进求解的变量，用标号表示。

差分方程是一个代数方程。

截断误差是原微分方程与相应的差分方程之间的差别，原微分方程的解析解与差分方程的解之间的差别是离散误差。

### 4.4 显式方法与隐式方法

显式方法中每一个差分方程只包含一个未知数，这个未知数可以用直接计算的方式显式地求解。

克兰克—尼科尔森格式：

这样的方程必须在所有内点上列出，形成一个代数方程组，从这个代数方程组中同时求解出，这就是隐式方法。

令

可得

对于显式方法，一旦取定，就不是独立的、不是可以任意取值的了，而是要受到稳定性条件的限制，其取值必须小于等于某个值。在许多情况下，必须取得很小才能保持稳定性。对许多隐式方法而言，用比显式方法大得多的仍能保持稳定性。

时间推进方法多是用来完成下面两类计算：

1) 由给定的初始条件得到流场的定常解。

2) 对真正的非定常流，求其时间精确解。

隐式方法在跟踪严格的瞬态变化时可能不如显式方法精确。

### 4.5 误差与稳定性分析

记偏微分方程的精确解是，差分方程的精确解是，在某个具有有限精度的计算机上实际计算出来的解为，那么离散误差是，舍入误差。

有

可得

求解要是稳定的应该有

假设求解区间是，两个端点处有指定的边界条件，没有任何误差。

所以

这个式子只给出了给定时间层上的空间变化，假定是时间的函数并且是指数函数

其中是和相关的常数。舍入误差满足原来的差分方程而且方程是线性的，所以只考虑级数中的一项

分析一个时步里是如何变化的

即

这叫冯·诺依曼(von Neumann)稳定性方法。

考虑一阶波动方程

如果写为欧拉显式格式

给不出稳定解，称为无条件不稳定的。如果用Lax方法

要求

称为柯朗(Courant)数，这个称为柯朗—弗里德里奇—列维(Courant-Friedrichs-Lewy)条件，简称CFL条件。

数值稳定性的一般概念建立在解本身随时间变化特性的基础上的，本质上与舍入误差并没有必然的联系。

### 习题

4-5

4-6

## 第5章 网格生成与坐标变换

### 5.1 引言

即使流场生成了非均匀网格，也需要将它变换成均匀分布的矩形网格。

必须确定一个变换，使物理平面内的点与计算平面内的点一一对应。

### 5.2 方程的一般变换

为简单起见，考虑二维非定常流场。要将物理平面中的自变量变换成计算平面中的一组新自变量。

这里称为度量，都是以为自变量的偏导数。

例5-1

这种变换的目的是把物理平面内的非均匀网格变换成计算平面内的均匀网格。计算平面的网格点的流场变量就是物理平面相应的网格点上的流场变量。

### 5.3 度量和雅可比行列式

逆变换

雅可比行列式

更一般地，若

### 5.4 再论适合CFD使用的控制方程

对空间二维的非定常流，如果没有源项

注意

令

那么

### 5.5 注释

因为流动问题自身的特性，或者边界形状，需要通过网格变换将物理平面内的非均匀网格变换成计算平面中的均匀网格。

### 5.6 拉伸(压缩)网格

例5-2

例5-3 假设是定常流，考虑连续性方程的守恒形式

即

例5-4

### 5.7 贴体坐标系：椭圆型网格生成

曲线是管道上壁，方程为，直线是中心线。

物理平面中沿着上边界曲线的所有点都落到计算平面中的水平线上。

物理平面内边界用表示，内边界上，是计算平面内的下边界；物理平面外边界用表示，外边界上，是计算平面内的上边界。边界上值为已知。

变换可以考虑是由一个椭圆型偏微分方程确定的。

注意

而且

根据例5-1，可得

注意

可得

其中

虽然网格生成的变换是椭圆型方程控制的，但是并不是只能用在控制方程为椭圆型的流动中。

### 5.8 自适应网格

应该将大量的、密集的网格点分布在流场变量存在的大的梯度的那部分流动区域内。

自适应网格是一种随时间变化的网格，在流场控制方程的时间推进求解中，网格的调整与按时间步计算流场变量的过程同步，自动向流场中梯度大区域聚集。自适应网格的优点是：当网格数量固定时，可以提高计算精度；给定精度时，可以用较少的网格点达到这一精度。

处理自适应网格时，计算平面由空间内的固定点组成，这些点不随时间变化，和还都是均匀的。计算平面内的固定点，对应的物理平面中的随时间变化。反之视物理平面中点固定，其对应的计算平面内的点是随时间变化的。有

设时刻点坐标为，可以通过累加求得，而与的计算关系需要事先约定，有

注意

因为物理平面中是独立变量所以

那么

解得

其中可用中心差分求得。

自适应网格本身可以作为一种流场显示方法。

### 5.9 网格生成的进展

现代CFD使用分块网格。分块网格的主要问题是如何在相邻的分区之间确定合适的几何交界面，通过恰当的连接保证CFD计算的精度。

### 5.10 有限体积网格生成的进展

在物理平面内的非均匀网格上可以直接进行有限体积计算，不需要任何变换。

## 第6章 计算流体力学的基本方法

### 6.1 引言

为简单起见，只考虑二维流动。在需要的时候，总是假设气体为常比热容完全气体。

### 6.2 拉克斯—温德罗夫(Lax-Wendroff)方法

考虑没有体积力、没有体积加热的非定常二维无粘流模型，有连续性方程

动量方程

能量方程

这些方程都已经整理成一种便于时间推进的形式。设时刻流场已知，网格处场的量为。

同理可以得到，于是可以得到

进一步

同理可求得。

拉克斯—温德罗夫法利用流场变量在网格点处时刻的值，可以计算出处时刻的值。

拉克斯—温德罗夫法在时间上和空间上都有二阶精度。

### 6.3 麦考马克(MacCormack)方法

设时刻流场已知，网格处场的量为。

可通过预估——校正原理得到。

预估步：

预估值

校正步：

预估步使用向前差分，校正步用向后差分。

### 6.4 粘性流动、守恒形式和空间推进

### 6.5 松弛法及其在低速无粘流动中的应用

### 6.6 数值耗散、色散及人工粘性

考虑一维波动方程

离散化为

因为所有导数都是在点和时刻取值的，所以略去下标和上标，即

目标是右边只有对求导的项。

两边分别对求导可得

消去得到的表达式

下来需要消去的表达式中的。

的表达式对求导得到

的表达式对求导得到

可得

定义，整理得

这个方程称之为修正方程。差分方程的精确解其实是修正方程的精确解。

项很像纳维—斯托克斯方程中的粘性项，扮演者耗散项的角色，称为数值耗散。这一项的系数称为人工粘性。

数值耗散是修正方程右端的偶数阶导数的直接结果，数值色散是奇数阶导数的直接结果。

人工粘性隐含在数值解中，尽管人工粘性降低了解的精度，但是通常有助于提高解的稳定性。

考虑非定常二维流

其中是解向量

下面设代表解向量的某个分量。在时间推进的每一步，都加入一个小的人工粘性，形式如下：

其中是试验取得的参数，通常在之间取值。

麦考马克方法计算，在预估步，根据时刻流场计算出，预估值

校正步得到和

最终

人工粘性的形式完全是经验的。

人工粘性对流场解的影响类似于物理粘性的影响。

### 6.7 交替方向隐式(ADI)方法

### 6.8 压力修正法及其在不可压粘性流动中的应用

### 6.9 用于CFD的计算机绘图技术

### 习题

6-1

6-2

# 第3部分 计算流体力学的应用

## 第7章 拟一维喷管流动的数值解

### 7.2 物理问题简介

考虑流过拉伐尔喷管的定常等熵流动。喷管入口处的流体来自驻室，驻室的横截面积足够大，内流速很小(趋于零)，内部的压力和温度分别称为滞止压力和滞止温度，也叫做总压和总温，记为和。流动在喷管的收缩段是亚声速的，在喉道(截面最小的位置)是声速，在扩张段是超声速。出口处的压力、温度、速度和马赫数记为。喉道处截面积为，压力、温度、速度记为。喷管轴向距离为，截面积随变化，假设流动参数仅随变化，这种流动称之为拟一维流动。

气体状态方程

焓

能量

连续性方程

动量方程

能量方程

记比热比，标准状态下的空气，有

### 7.3 亚声速——超声速等熵喷管流动的CFD解法

为拟一维喷管流动建立一种时间推进的有限差分方法。

7.3.1 问题的提法

1) 建立流动控制方程

有限控制体为微元厚度为的一小段喷管。

先考虑连续性方程的积分形式

再考虑方向动量方程的积分形式

最后考虑能量方程的积分形式

而

于是

利用

最终得到连续性方程

动量方程

能量方程

喷管长度为，驻室声速，定义无量纲量

那么

代入连续性方程

其中

得到

代入动量方程

其中

得到

代入能量方程

其中

得到

2) 建立麦考马克显式方法的有限差分表达式

轴上均匀分布个网格点，间距为，略去撇号。

预估步使用向前差分

预估值

校正步用向后差分

然后

3) 细节说明

是流动中某一点处的流速，是该处声速，马赫数

其中是柯朗数，即

计算中取

边界条件，亚声速入流边界

超声速出流边界

时刻

### 7.4 全亚声速等熵喷管流动的CFD解法

喉道面积记为。

1) 对于喷管中的亚声速流动，每一个指定的压力比对应着一个可能的等熵解。

2) 亚声速情况下，最小面积处马赫数小于，声速流动对应的喉道面积。

给定，根据

计算出，再根据

计算出参考值，然后根据可以计算出当地马赫数，进而计算出当地的。

7.4.1 问题的提法：边界条件和初始条件

### 7.5 再论亚声速——超声速等熵喷管流动的CFD解法

### 7.6 激波捕捉

## 第8章 二维超声速流动的数值解——普朗特—迈耶稀疏波

## 第9章 不可压库埃特(Couette)流的数值解

### 9.2 物理问题及其解析解

设有两个相距为的平行平板，上面的平板以速度运动，下平板静止。体积力。考虑两个平板间的粘性定常流动，流场的变化与无关。

时，于是有

于是

而

所以

### 9.3 数值方法：隐式克兰克—尼科尔森(Crank-Nicolson)方法

假设初始速度剖面

考虑两个平板间的粘性非定常流动，流场的变化与无关。。

控制方程为

9.3.1 数值方法

定义无量纲变量

那么

令

略去撇号得到

根据克兰克—尼科尔森格式，有限差分表达式为

得到

令

可得

被等分

边界条件

实际上只有共个未知数。

9.3.2 问题的提法

显式方法的稳定性条件

对于隐式格式，取

其中是一个参数。克兰克—尼科尔森格式是无条件稳定的，可以选任何值。把作为参数

最后的定常态与无关，但趋近定常态的瞬时过程却是依赖于的。